RED INTERNACIONAL DE
INVESTIGADORES EN
MPETITIVIDAD

Las opiniones y los contenidos de los trabajos publicados son responsabilidad de los autores, por tanto, no necesariamente coinciden con los de la Red Internacional de Investigadores en Competitividad.

LA PRODUCTIVIDAD DEL TRABAJO POR SU CONTRIBUCIÓN AL VALOR DEL PRODUCTO
(Metodología para medir la contribución marginal de trabajo al valor de lo producido)

Jorge Isauro Rionda Ramírez[1]
Guanajuato, Gto; a 11 de octubre de 2007

RESUMEN

Este trabajo hace una propuesta metodológica acerca de cómo medir la contribución marginal del trabajo al valor del producto. Se aplica al caso de la producción de bienes tangibles. Parte de un modelo de programación lineal cuyo dual estipula precios sombra que indican la contribución marginal al valor producido de cada unidad de insumo involucrado en la producción. Es un acercamiento novedoso dado que en los trabajos marginalistas no existe acercamiento alguno *ex profeso*. Así también presenta un acercamiento interesante en materia de precios de oportunidad en la sustitución de factores productivos en base al grado de intensidad utilizada del mismo, como de su contribución al valor producido.

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo propone un mecanismo por el cual se puede medir la contribución marginal del trabajo al valor del producto. Es un trabajo metodológico Entrando en materia, se da inicio con las siguientes consideraciones:

La teoría neoclásica (siglo XIX) considera que la remuneración al trabajo es con base a su productividad marginal. Establece que con base a los factores productivos, un planteamiento transversal del problema (cálculo diferencial) indica la participación unitaria de cada factor productivo al producto final. Pero, cómo medir cuál es este valor, y cómo llevarlo de cantidades físicas producidas a una expresión nominal (en términos monetarios).

No se quiere enclaustrar esta exposición en el marco teórico de una corriente doctrinaria dentro de la teoría político - económica, pero por las implicaciones que pueda llevar el instrumental matemático del que se vale el presente desarrollo, este es un acercamiento que en mucho coincide con el planteamiento neoclásico que va de acuerdo a la productividad marginal del mismo (o contribución marginal al valor del producto). Ahora, cómo medir esta, de tal modo que con ello se establezca un criterio de justeza.

---

[1] Profesor Investigador del Centro de Investigaciones Humanísticas de la Universidad de Guanajuato. Licenciado en economía (UAM-I), maestro en administración (U.G.), doctor en Estudios Laborales (UAM-I) Doctor en Ciencias Sociales (UAA). Profesor investigador de la Universidad De La Salle Bajío. Miembro del sistema nacional de investigadores (nivel 1) desde enero de 2005.

Por ello el presente trabajo procura establecer una metodología relativa al establecimiento de la contribución marginal del trabajo al valor producto final, o a los beneficios, según sea el caso. Por ello, el valor de este estudio consiste en la manera del que se vale para poder dimensionar el valor del trabajo, en base a la mensura de su contribución al producto, dentro de una sola línea de producción de un bien tangible.

SUPUESTOS

Los supuestos del modelo son los siguientes:

- Se trata de la producción de bienes tangibles.
- Se opera en el corto plazo, por lo que las relaciones entre las variables consideradas son constantes y lineales.
- Se trata de una sola línea de producción de un bien tangible.
- Se tienen rendimientos constantes a escala.
- Se supone un nivel de destreza y de desarrollo técnico medio.

La categoría del trabajo se refiere al trabajo vivo, implicado directamente en la producción del bien, y no a la gelatina de trabajo, o capital constante -trabajo histórico-, de los medios e insumos de la producción.

METODOLOGIA.

La herramienta básica utilizada es la programación lineal. El planteamiento de hecho se expresa en términos de la maximización de una función de producción objetivo con las restricciones relativas al uso de las existencias de los propios insumos materiales de la producción, como “stock”. Más el instrumento clave es el “Multiplicador de Lagrange”[2], correspondientes a los “Precios Sombra” expresados en la función objetivo del problema dual, en especial el relativo al insumo trabajo.

El planteamiento matemático esta en términos de matrices, para el manejo sintético de la presente propuesta, lo que permite una comprensión más propia, o al menos una presentación más clara del modelo planteado.

El planteamiento parte de la postura marginalista de considerar como retribución justa al trabajo aquella respectiva a la productividad marginal de este insumo. La unidad de medida es la cantidad física por “hora por Hombre” (h/H). Por lo que el rendimiento de este insumo esta en base a dicho parámetro.

[2] Para un conocimiento más específico del uso de los precios sombra el autor recomienda ver a Brigham, E. F. y Pappas, J.L (1990), Pp. 201 - 202.

Con base a la manera de citar y las referencias bibliográficas aquí señaladas, se usa el método de Harvard para tal efecto, por lo que existe referencia directa entre las citas del trabajo y la bibliografía al final del mismo.

MODELO

El planteamiento de Programación Lineal es el típico para una función de producción. Se trata de expresar el planteamiento primal en su dual y de ahí derivar los precios sombra de los insumos que nos indican el rendimiento de cada unidad de estos en términos del producto final. En especial, el rendimiento del trabajo, el cual también puede ser considerado como su contribución marginal al producto.

Este es un acercamiento al Multiplicador de Lagrange, que nos expresa aproximadamente cuánto aporta al producto final cada unidad del insumo utilizado. Este multiplicador es válido sólo para una línea de producción que requiere un sólo insumo, por lo que enfrenta una restricción de igualdad que delimita la propia existencia del insumo; pero para el caso varias restricciones ; o sea dicho, de varios insumos productivos, la restricción a la maximización de la producción es también la existencia de los insumos utilizados pero de manera combinada por lo que se puede usar total o parcialmente dichas existencias, según lo condicionen para cada insumo, las existencias de los demás insumos productivos utilizados en base a la mejor asignación o uso de los mismos para lograr la máxima producción.

Para el desarrollo de lo anterior se tiene que, se plantea el siguiente esquema de programación lineal, como problema primal, representativo de una función de producción a corto plazo, con rendimientos constantes a escala, de un sólo bien tangible (Z).

Función Objetivo	Max $Q_z = A_{(1x\,n)} * X_{(n\,x\,1)}$
Sujeto a	$B_{(p\,x\,n)} * X_{(n\,x\,1)} <= C_{(p\,x\,1)}$
Siendo	$x_{ij} >= 0$

Donde $\mathbf{Q}_z$ es el volumen producido del bien tangible "Z".

$\mathbf{A}_{(1\ x\ n)}$ es la vector fila de coeficientes técnicos a_{ij} que expresan el número de componentes utilizados en la producción total del producto Z. $\mathbf{A}_{(1\ x\ n)}$= (a_{11} a_{12} ... a_{1n}))

$\mathbf{X}_{(n\ x\ 1)}$ es el vector columna que se integra de los X_{ij} componentes necesarios por unidad de producción del bien Z.

$$\mathbf{X}_{(n\,x\,1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ : \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_{(p\ x\ n)}$ es la matriz que contiene a los coeficientes b_{ij} los cuales representan las cantidades requeridas de cada insumo por componente de producción del bine Z.

$$\mathbf{B}_{(p \times n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{C}_{(p \times 1)}$ es el vector columna que contiene los coeficientes c_{ij} que son las cantidades existentes de cada insumo.

$$\mathbf{C}_{(p \times 1)} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}$$

Queda en entendido que una de las restricciones correspondientes al "stock" de existencia de los insumos corresponde al trabajo y es un vector que esta implícito en el producto de matrices $B_{(p \times n)} * X_{(n \times 1)} <= C_{(p \times 1)}$, el cual será expresado en lo consecutivo como :

$$\mathbf{b_{L1}X_{L1} + b_{L2}X_{L2} + \dots + b_{Ln}\,X_{Ln} <= c_{Lj}}$$

Donde el subíndice "**L1**" indica que es el coeficiente relativo al uso del recurso trabajo en relación a cada componente del producto objetivo.

Como es bien sabido, el desarrollo dual de un problema primal de programación lineal, aporta información adicional a la comprensión del mismo ; por lo que, de esto derivamos su correspondiente expresión dual :

Función Objetivo	Min $Q_z = C'_{(1 \times p)} * Y_{(p \times 1)}$
Sujeto a	$B'_{(n \times p)} * Y_{(p \times 1)} >= A'_{(n \times 1)}$
Siendo	$y_{ij} >= 0$

Donde $\mathbf{Y}_{(p \times 1)}$ es el vector columna que integra los coeficientes $\mathbf{y}_{ij}$ que son los valores imputables o "Precios Sombra" que miden la contribución marginal por insumo a la producción.

$$\mathbf{Y}_{(p \times 1)} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$$

De este problema dual se extrae el precio sombra "y_{Lj}" implícito en el vector columna $Y_{(p \times 1)}$ que precisamente expresa la contribución marginal (por unidad, medida en h/H) de cada h/H a la producción total objetivo. Por ello, este precio sombra (que es de hecho un multiplicador de Lagrange) es de especial relevancia para el objetivo procurado, pues mide en términos de la propia producción y en unidades físicas la contribución marginal del trabajo al producto, o llámese de otro modo, su productividad marginal[3].

En otras palabras, el precio sombra del insumo trabajo **(y_{Lj})**, medido en hora/Hombre (h/H), nos da la contribución marginal de este insumo a la producción. Es decir, lo que cada h/H aporta a la producción total (o al producto, según sea planteado).

Otra manera de obtener el precio sombra correspondiente al insumo trabajo es a través de la derivada parcial de la función objetivo en términos de Lagrange, respecto a la variable relativa de cada insumo e igualándola a cero, esto es;

$\boldsymbol{\delta Qz\lambda/\delta y_{ij}}$ de la función objetivo de una expresión de Lagrange siguiente[4].

$\mathbf{Qz\lambda = C'_{(1x\,p)} * Y_{(p\,x\,1)} - b_{L1}X_{L1} + b_{L2}X_{L2} + ... + b_{Ln} - c_{Lj} - S_j + A_j}$, siendo que $\mathbf{y_{Lj}}$ queda implícita en el producto de matrices $\mathbf{C'_{(1x\,p)} * Y_{(p\,x\,1)}}$ y que $\mathbf{S_j}$ y $\mathbf{A_j}$ son la variable de holgura y la variable artificial implicadas en la conversión de una desigualdad del tipo >= en igualdad.

De lo anterior se forma un sistema de ecuaciones lineales con un número similar de incógnitas y_{ij} , por lo que se trata de un sistema de ecuaciones consistente.

Las variables de holgura y artificial son irrelevantes pues se pierden en cada primera derivada parcial en mención por lo que la postulación de Lagrange tiene solución y aporta el respectivo precio sombra o su acercamiento de izquierda o derecha, a este para cada insumo.

Así, una vez obtenido el respectivo precio sombra del insumo trabajo, este nos aporta la contribución marginal del trabajo al producto en unidades físicas del producto final. En términos reales, esta debe ser la retribución al trabajo, sin embargo el empleador, o empresario, normalmente no paga a sus empleados en especie, sino como una remuneración nominal, expresada en unidades monetarias, por lo que su equivalencia sería la correspondiente a multiplicar el susodicho precio sombra, o proporción física con la que contribuyó al producto final el trabajador por hora trabajada, por el precio del producto al que lo vende el productor, o **Precio Unitario de Producción (Pup)**. Así, se tendría la cuota nominal de remuneración merecida por el empleado según el rendimiento de su trabajo expresado en el producto final. Matemáticamente esto es :

Cuota Nominal de Retribución al trabajo

Remuneración : Pup * Y_{L1}* Número de h/H trabajadas.

Con esta última expresión se tiene finalmente la fórmula que cumple el objetivo perseguido en el presente trabajo el cual consiste en proporcionar una herramienta capaz de medir la producción marginal del trabajo.

---

[3] Budnick, Frank S. (1993) Cap. 6. Pp. 223 - 318, y Chiang, Alfa (1993) Cap. 20. Pp. 712 - 716.

[4] La λ indica que es una expresión del tipo para resolver u obtener el Multiplicador de Lagrange y la δ a su vez indica "derivada de" expresión relativa al cálculo infinitesimal.

Así también, los precios sombra derivados del planteamiento dual aportan coeficientes que permiten medir y evaluar el costo de oportunidad ante la sustitución de un insumo por otro, con ello se tiene un acercamiento de interés en las decisiones de optimización de la empresa en torno a la función de producción y la composición técnica del capital (Relación entre el capital y el trabajo) ante las innovaciones tecnológicas.

Remuneración al trabajo de prestación de servicios

Ahora bien, hasta aquí se ha desarrollado un criterio que permite identificar la contribución marginal del trabajo en el producto físico, pero ¿cómo se debe hacer para el caso de un prestador de servicios ? Esto es, el trabajo también contribuye en el valor de los servicios pero ¿cómo medir y establecer una cuota salarial justa para un productor de servicios?

Una persona que trabajo prestando sus servicios laborales a un tendero como vendedor, no produce nada físico pero su trabajo contribuye a la colocación de las ventas de la empresa. ¿Cómo puede saberse en concreto su contribución marginal si no hay producto físico, material de su labor? Pues bien, este empleado no produce materialmente nada, presta un servicio al cliente en atención y orientación en cuanto cotizaciones y existencias del expendio comercial, su contribución no es propiamente en los productos que vende pues el no los produce, sólo los coloca comercialmente. Más bien, su contribución radica precisamente en el número de ventas colocadas y que se expresa no en el valor de los bienes que vende sino en su contribución marginal en las ganancias que se realizan según el volumen de ventas que este logre colocar. Así, la productividad marginal del trabajo en materia de servicios contribuye en las ganancias empresariales, por lo que parte de ellas le corresponden como retribución justa a su esfuerzo laboral. Por lo mismo, y siguiendo la metodología anterior el problema se expresa en los mismos términos de la programación lineal pero con las adecuaciones siguientes :

Función Objetivo	Max $\Pi_z = A_{(1x\,n)} * P_{(n\,x\,1)}$
Sujeto a	$B_{(p\,x\,n)} * P_{(n\,x\,1)} <= C_{(p\,x\,1)}$
Siendo	$p_{ij} >= 0$

Donde Π_z es la Ganancia Neta Total obtenida por el volumen de ventas de los diferentes productos P_{ij}.

$\mathbf{A}_{(1\,x\,n)}$ es el vector fila de coeficientes a_{ij} que expresan la contribución marginal de los beneficios netos por cada bien vendido P_{ij}. $\mathbf{A}_{(1\,x\,n)}= (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n})$

$\mathbf{P}_{(n\,x\,1)}$ es el vector columna que se integra de los productos P_{ij} que componen la canasta de bienes ofrecidos al mercado.

$$\mathbf{P}_{(n\,x\,1)} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ : \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_{(p \times n)}$ es la matriz diagonal descendente que contiene a los coeficientes b_{i1} los cuales representan el número de ventas de cada servidor por tipo de producto que compone la canasta de bienes ofrecidos al mercado. Se parte del supuesto de que a cada servidor se le ha asignado la venta de un único producto de tal modo que el volumen de ventas de cada bien esta relacionado con un solo vendedor ; esto se hace para simplificar la ejemplificación de cómo establecer la cuota de remuneración al trabajo de los prestadores de servicios, pero puede desarrollarse de manera ampliado un caso de programación lineal más real diferenciado al venta de los vendedores ; pero esto escapa a la objetividad del presente trabajo. Así :

$$\mathbf{B}_{(p \times n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{C}_{(p \times 1)}$ es el vector columna que contiene los coeficientes c_{ij} que son las cantidades existentes de cada producto a vender.

$$\mathbf{C}_{(p \times 1)} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ : \\ c_{n1} \end{pmatrix}$$

Queda en entendido que una de las restricciones correspondientes al “stock” de existencia de los productos a venta, también corresponde al trabajo (número de empleados utilizados en el almacén), y es un vector que esta implícito en el producto de matrices $B_{(p \times n)} * P_{(n \times 1)} <= C_{(p \times 1)}$, el cual será expresado en lo consecutivo como :

$$\mathbf{0 + \dots + b_{ij}P_{ij} + 0 + \dots + 0 <= c_{ij}}$$

Donde el subíndice “**ij**” indica que es el coeficiente relativo al uso del recurso trabajo en relación al volumen de ventas, y su correspondiente $\mathbf{b}_{ij}$ (donde i = j) es el número promedio de ventas por trabajador, y $\mathbf{c}_{ij}$ es el número total de empleados.

Como es bien sabido, el desarrollo dual de un problema primal de programación lineal, aporta información adicional a la comprensión del mismo ; por lo que, de esto derivamos su correspondiente expresión dual :

Función Objetivo	Min $Q_z = C'_{(1 \times p)} * Y_{(p \times 1)}$
Sujeto a	$B'_{(n \times p)} * Y_{(p \times 1)} >= A'_{(n \times 1)}$
Siendo	$y_{ij} >= 0$

Donde $\mathbf{Y}_{(p \times 1)}$ es el vector columna que integra los coeficientes $\mathbf{y}_{ij}$ que son los valores imputables o “Precios Sombra” que miden la contribución marginal por insumo al beneficio.

$$\mathbf{Y}_{(p \times 1)} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$$

De este problema dual se extrae el precio sombra "y_{Lj}" implícito en el vector columna $Y_{(p \times 1)}$ que precisamente expresa la contribución marginal (por unidad de medida venta por Hombre V/H), de cada V/H al beneficio total objetivo. Por ello, este precio sombra es de especial relevancia para el objetivo procurado, pues mide en términos de la propia ganancia y en unidades físicas la contribución marginal del trabajo de un servidor al volumen de beneficios, o llámese de otro modo, su beneficio marginal[5].

En otras palabras, el precio sombra del insumo trabajo **($\mathbf{y_{Lj}}$)**, medido en Venta/Hombre (V/H), nos da la contribución marginal de cada unidad vendida al beneficio total. Es decir, lo que cada V/H del trabajo de un servidor aporta a la ganancia total.

Por ende, la contribución marginal del trabajo al valor de ventas de cada vendedor esta en proporción directa al número de ventas que este logre colocar, así como a la contribución marginal de esas ventas al beneficio global ; por lo que de ahí se deriva entonces que, la suma de beneficios con que cada prestador de servicios participa en el beneficio global, es propiamente al valor de su contribución.

La remuneración al dueño del expendio esta en proporción directa al volumen de ventas que este atienda y su contribución a los beneficios globales, así como a una tasa de ganancia que establezca por cada tipo de bien que se venda en su expendio, con base a las condiciones competitivas del mercado.

En resumen, la contribución del trabajo en la prestación de servicios también puede establecerse a través de la contribución marginal a los beneficios, esto mediante el volumen de ventas de cada producto por trabajador.

Es importante señalar que la prestación de servicios de tipo público no entran dentro de esta metodología pues en este caso no se trata de colocación de ventas y de maximización de ganancias, sino más bien, la racionalidad de un esquema público de prestación de servicios persigue un beneficio social, no privado y no necesariamente del tipo económico. Para este caso, se sugiere que los criterios de normatividad para establecer la cuota de remuneración a los servidores públicos se mida a través de una administración por objetivos, y con criterios que no -necesariamente-, pueden ser establecidos por medio de un planteamiento de programación lineal sino a través de la concertación social y de clase, necesidad y valor del trabajo prestado a nivel social, entre muchos criterios más que pueden considerarse por sector de trabajo público como es educación, justicia, asistencia social, salud, entre otros.

---

[5] Budnick, Frank S. (1993) Cap. 6. Pp. 223 - 318, y Chiang, Alfa (1993) Cap. 20. Pp. 712 - 716.

BIBLIOGRAFÍA

Birgham, E.F. y Pappas, J.L.
1990 Economía y Administración. Editorial Iberoamericana. “a edición en español. México.

Budnick, Frank S.
1993 Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 3a. edición en español. Editorial Mc Graw Hill. México.

Chiang, Alfa
1993 Métodos Fundamentales de Economía Matemática. 3a. edición en español. Editorial Mc Graw Hill. México.